

# ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИЙ

Шмуклер В.С.

Харьковская национальная академия городского хозяйства

Резник П.А.

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры  
г. Харьков, Украина

**АНОТАЦІЯ:** У роботі побудовано метод вирішення температурної задачі теорії конструкцій. У його основі лежить спеціальна ітераційна процедура, яка використовує на кожному кроці метод В.М. Майзеля. Наведено теоретичні основи метода, скінченоелементна модель конструкції, алгоритм реалізації.

**АННОТАЦИЯ:** В работе построен метод решения температурной задачи теории конструкций. В его основе лежит специальная итерационная процедура, использующая на каждом шаге метод В.М. Майзеля. Приведены теоретические основы метода, конечноэлементная модель конструкции, алгоритм реализации.

**ABSTRACT:** The method of solution temperature problem of the theory of structures is built. It is based on a special iterative procedure which uses at each step the method of V.M. Maizel. The theoretical bases of the procedure solution, mathematical model of the design, algorithm implementation are presented.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** температура, инварианты тензора деформаций и напряжений, плотность потенциальной энергии.

Решение температурной задачи теории конструкций представляет собой достаточно сложную и актуальную проблему, алгоритмы реализации которой еще далеки до совершенства. Процедуры, используемые в известных вычислительных комплексах, в основном, базируются на подходе С.П. Тимошенко, представляющим температурное воздействие в виде "дополнительной" нагрузки, либо на теореме Н.И. Мусхелишвили,



устанавливающей связь между температурными напряжениями и дислокациями [1, 4, 5]. Анализ полученных решений (в особенности, для задачи огнестойкости) также указывает на целый ряд несоответствий и парадоксов количественного, а зачастую, качественного характера [7]. Перечисленное является поводом для поиска, отличной от традиционной, идеологии, фундирующей методологию определения температурных перемещений и напряжений.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматривается соответствующим образом закрепленная, занимающая многосвязную область конструкция (тело), подверженная действию объемных и поверхностных нагрузок, а также температуры  $T=T(x,y,z,t)$ . Здесь  $x,y,z$  — координаты декартовой системы, а  $t$  — время. Материалы конструкции, в общем случае, физически нелинейны, изотропны, а их физико-механические параметры  $E$  (модуль деформаций 1-го рода) и  $\nu$  (коэффициент поперечных деформаций) являются функциями температуры и времени. Считается, что для материалов известны диаграммы-изотермы-изохроны (рис. 1) [6, 8]. Известна также зависимость от температуры коэффициента температурной линейной деформации. Требуется найти перемещения и напряжения.

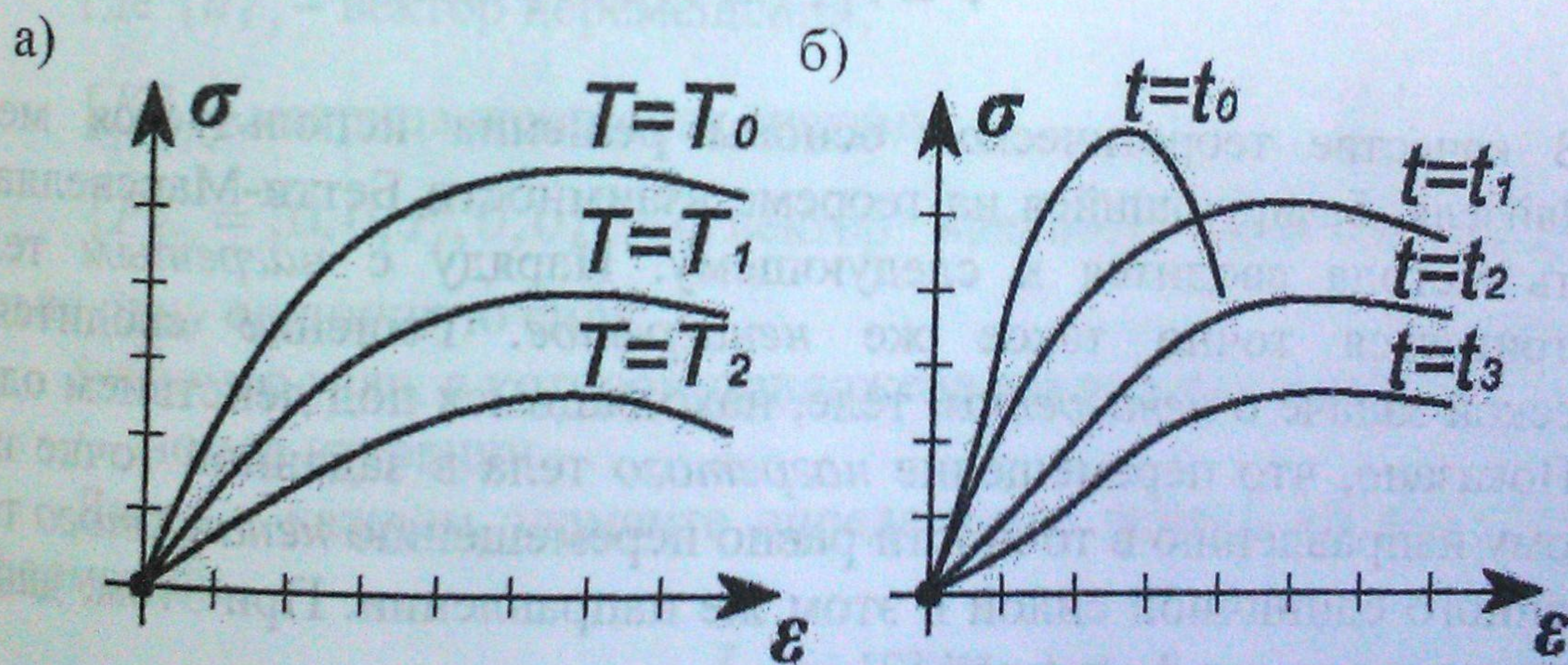


Рис. 1. Диаграммы "напряжения-деформации" для применяемых материалов: а) диаграммы-изотермы; б) диаграммы-изохроны

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Модель конструкции строится в конечноэлементной форме (рис. 2) [7].



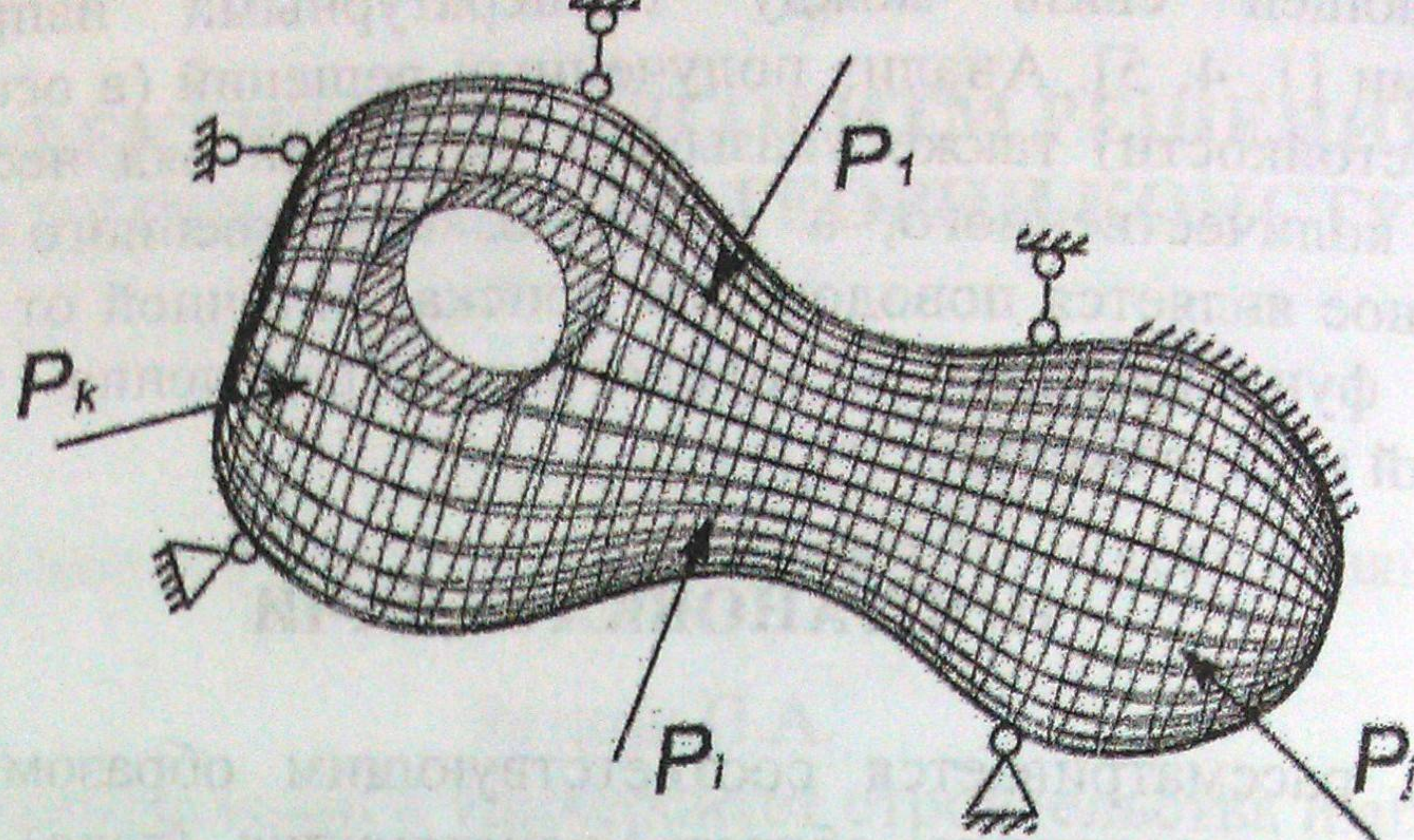


Рис. 2. Конечноэлементная модель конструкции

Далее в соответствии исходному физически нелинейному телу ставится некоторая физически линейная, но неоднородная среда, свойства которой зависят от распределения температуры и времени, т.е. в конечном итоге от координат:

$$\begin{aligned} E &= E[T(x, y, z), t], \\ \nu &= \nu[T(x, y, z), t]. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве теоретической основы решения используется метод В.М. Майзеля, базирующийся на теореме взаимности Бетти-Максвелла [2, 3]. Суть метода сводится к следующему. Наряду с *нагретым* телом рассматривается точно такое же *ненагретое*. Решение сводится к статической задаче о *ненагретом* теле, находящемся под действием одной силы. Показано, что перемещение *нагретого* тела в заданной точке и по заданному направлению в точности равно перемещению *ненагретого* тела, нагруженного единичной силой в этом же направлении. При этом, данное решение определяется формулой [2]:

$$U(x, y, z, t) = \iiint_{(V)} \frac{\alpha E}{1-2\nu} \cdot T(x, y, z, t) \cdot I_{1\epsilon} dV = \iiint_{(V)} \alpha \cdot T(x, y, z, t) \cdot I_{1\sigma} dV, \quad (2)$$

где  $U(x, y, z, t)$  – перемещение в точке с координатами  $x, y, z$  и в момент времени  $t$ , в направлении приложенной единичной силы;  
 $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$  – коэффициент линейной температурной деформации;  
 $V$  – объем, занятый телом;



$I_{1\varepsilon}$  — первый инвариант тензора деформаций;

$I_{1\sigma}$  — первый инвариант тензора напряжений.

Формула (2) охватывает всю проблему в наиболее общей постановке и пригодна для одного, двух и трехмерных тел, одно и многосвязных, свободных и закрепленных, с постоянными и переменными физико-механическими характеристиками, зависящими от температуры. В свою очередь, температурные поля могут быть любых типов, стационарные и нестационарные.

Определив по формуле (2) перемещение, его следует приложить к конструкции и найти от него все компоненты напряженно-деформированного состояния.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Задача решается методом последовательных приближений. По заданному стартовому температурному полю  $T(x,y,z,t)$  и диаграммам-изотермам и диаграммам-изохронам назначаются физико-механические характеристики для каждого конечного элемента. Затем стандартным образом формируется решение задачи о загрузении тела единичной силой, приложенной в заданной точке:

$$\{u\}_j = [K]_j^{-1} \{P\}_j, \quad (3)$$

где  $\{u\}_j$  — вектор перемещений;

$[K]_j$  — матрица жесткости системы;

$\{P\}_j = \{0, 0, P_i, 0, 0\}$  — вектор внешних нагрузок, содержащий только одну единичную силу;

$i$  — номер узла, в котором приложена единичная сила;

$j$  — номер итерации.

Далее в каждом элементе определяется первый инвариант тензора деформаций:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (4)$$

либо, на основании закон Гука, первый инвариант тензора напряжений:

$$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (5)$$

Здесь  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\}$  — вектор линейных деформаций;

$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z\}$  — вектор нормальных напряжений.



На следующем этапе по формуле (2) определяется температурное перемещение в заданной точке конструкции, а затем выполняется расчет системы на заданное перемещение. Определив все компоненты напряженно-деформированного состояния от заданного перемещения, определяются физико-механические характеристики конечных элементов для следующего шага [7]:

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= E_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1} \\ \nu_{j+1} &= \nu_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1} \\ \alpha_{j+1} &= \alpha_j \cdot e_j \cdot e_{jn}^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $e_j$  — плотность энергии деформации (ПЭД) в  $i$ -том конечном элементе, определяется площадью диаграмм-изотерм и диаграмм-изохрон;

$e_{jn}$  — нормируемое значение плотности энергии деформаций, формируемое в соответствии с принятым критерием предельного состояния.

В частности, нормируемая величина ПЭД может быть определена [7, 9]:

$$e_n = 0.5 \chi_\varepsilon^2 [(\chi_\varepsilon + 1)e_{nc} - (\chi_\varepsilon - 1)e_{nt}] - (1 - \chi_\varepsilon^2)e_{nsh}, \quad (7)$$

где  $\chi_\varepsilon \in [-1; 1]$  — параметр Лоде-Надаи;

$e_{nc}; e_{nt}; e_{nsh}$  — частные нормируемые значения ПЭД для одноосного сжатия, растяжения, сдвига. В случае линейного и упругого деформирования:  $e_{nc} = 0.5 R_c^2 E^{-1}$ ;  $e_{nt} = 0.5 R_t^2 E^{-1}$ ;  $e_{nsh} = 0.625 R_c R_t E^{-1}$ , где  $R_c; R_t$  — нормируемые напряжения на сжатие и растяжение.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока найденное поле перемещений (напряжений) не совпадет на предыдущей и последующей итерациях с заданной точностью:







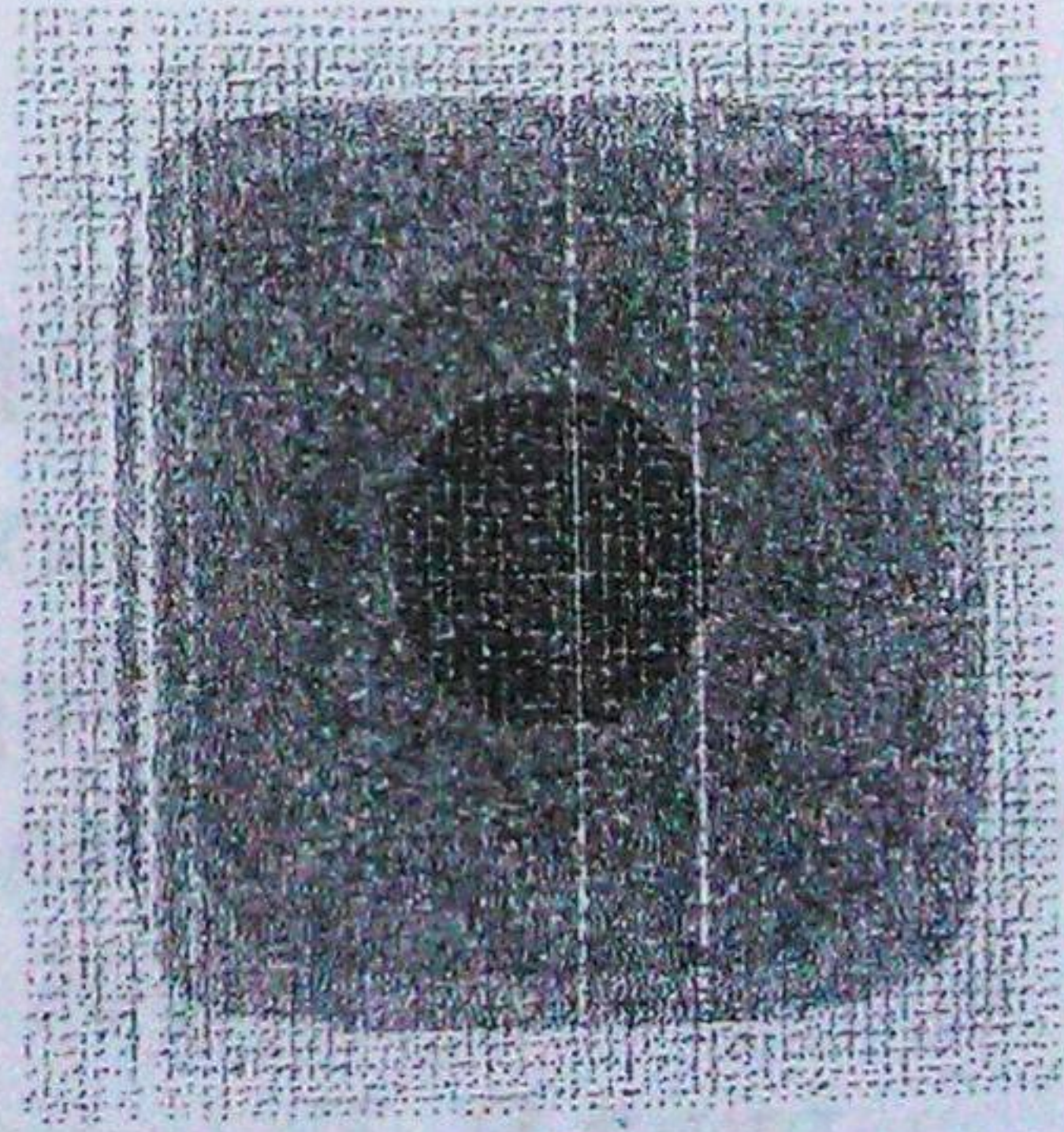
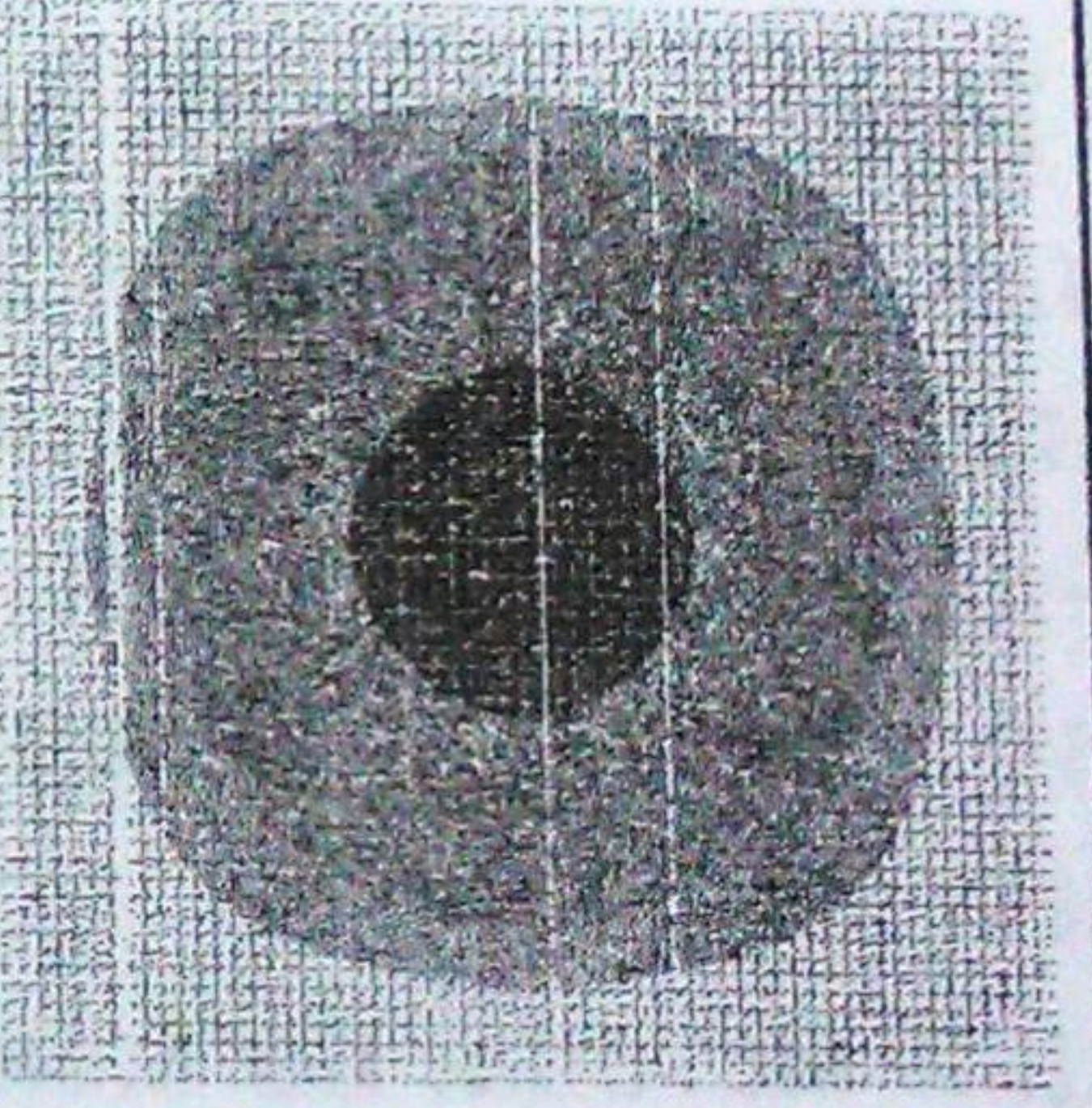
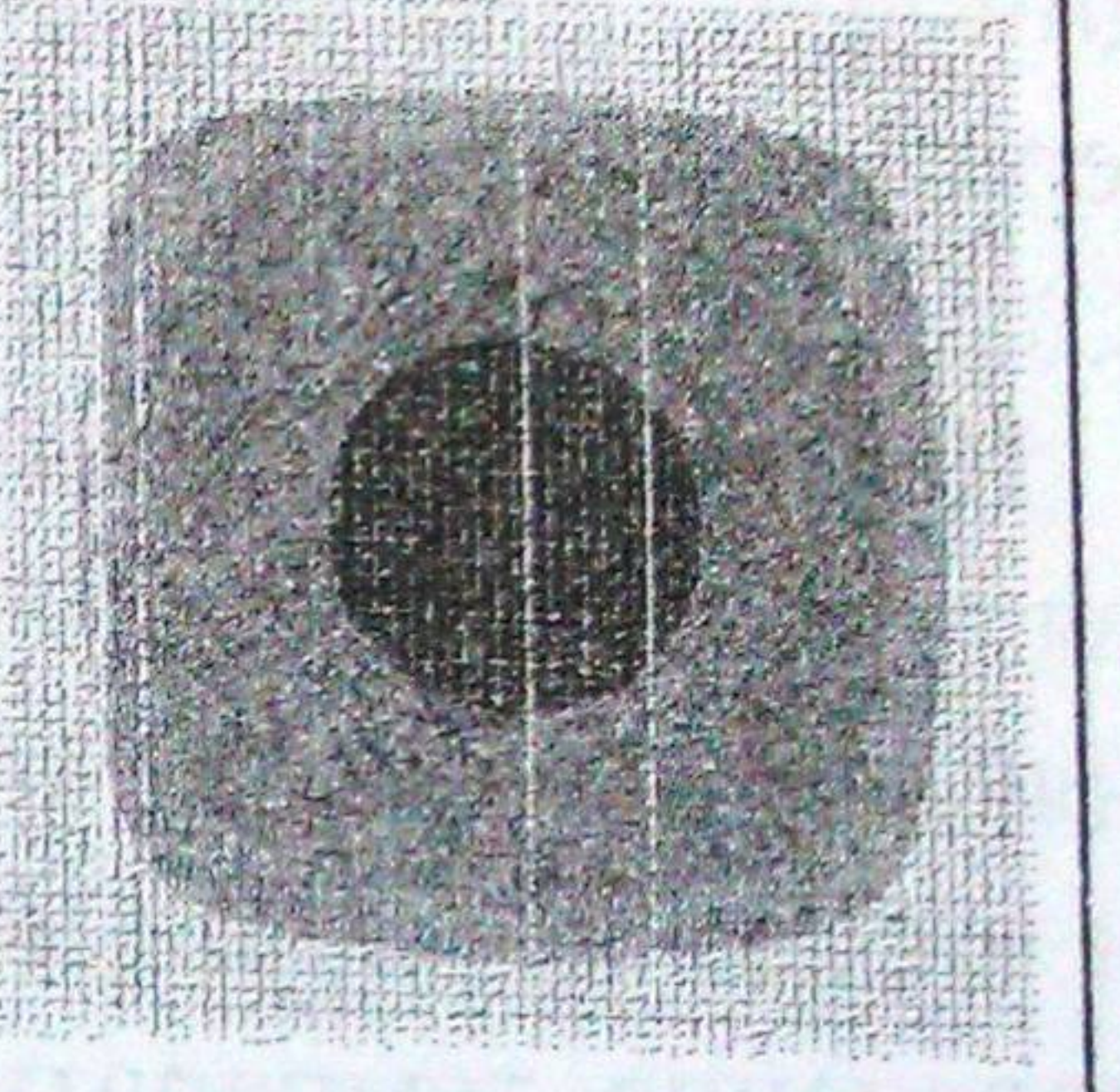
$$\max |u_{j+1} - u_j| \leq \varepsilon, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность.

Для проверки составленного алгоритма было решено несколько примеров. При этом, варьировалось количество узлов приложения температурного перемещения. Результаты, полученные предложенным методом, сопоставлены с результатами расчета этих же задач при использовании ПК «Лира». Проведенные расчеты иллюстрируются полями перемещений (табл. 1).



Таблица 1

Поле перемещений			Максимальное расхождение, %
ПК «Лира»	Предложенный метод с приложением перемещений в		
Пример 1		I – 14 точках	II – 24 точках
			
Пример 2		I – 24 точках	II – 56 точках
			
Пример 3		I – 21 точке	II – 41 точке
			
			I – 39.1 II – 12.2
			I – 28.25 II – 14.18
			I – 50.91 II – 28.61



**Пример 1.** Рассматривается шарнирно опертая бетонная 3-х метровая балка постоянного сечения ( $b=150$  мм,  $h=300$  мм). Бетон класса С20/25. Балка нагрета до постоянной температуры  $500^{\circ}\text{C}$ .

**Пример 2.** Рассматривается шарнирно опертая железобетонная 3-х метровая балка постоянного сечения ( $b=150$  мм,  $h=300$  мм). Бетон класса С20/25. Верхняя арматура  $2\varnothing 12\text{A}400\text{C}$ , представлена слоем в сечении толщиной 3 мм. Нижняя арматура  $2\varnothing 16\text{A}400\text{C}$ , представлена слоем в сечении толщиной 3,5 мм. Высота среднего (бетонного) слоя 232,5 мм. Распределение температуры по высоте сечения (сверху вниз:  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $200^{\circ}\text{C}$ ,  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $600^{\circ}\text{C}$ ).

**Пример 3.** Рассматривается шарнирно опертая по контуру железобетонная плита высотой 200 мм с размерами в плане  $3\text{ м} \times 3\text{ м}$ . Бетон класса С20/25. Нижняя арматура  $\varnothing 12\text{A}400\text{C}$  с шагом 200 мм по обеим осям, представлена слоем в сечении толщиной 3 мм. Высота среднего (бетонного) слоя 167 мм. Распределение температуры по высоте сечения (сверху вниз:  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $300^{\circ}\text{C}$ ,  $600^{\circ}\text{C}$ ).

## ВЫВОД

Предложенный метод открывает широкие возможности для решения нелинейных и линейных, стационарных и нестационарных температурных задач. Он физически прозрачен и логически последователен. Без каких-либо трудностей программные модули, составленные на основе данного метода, адаптируются к существующим вычислительным комплексам. Можно констатировать, что количество вычислительных операций метода, по меньшей мере, не превышает количество операций в известных алгоритмах. При этом, его комбинаторные возможности существенно шире и разнообразнее, чем упомянутые модификации соответствующих решений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Городецкий А.С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций / Городецкий А.С., Шмуклер В.С., Бондарев А.В. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2003. – 889 с.
2. Майзель В.М. Температурная задача теории упругости / Майзель В.М. – К.: АНУССР, 1951, – 150 с.
3. Новацкий В. Теория упругости / Новацкий В. – М.: МИР, 1975. – 872 с.
4. Тимошенко С.П. Теория упругости / Тимошенко С.П., Гудьер Дж. – М.: Наука, 1975. – 576 с.



5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Шмуклер В.С. К упрощению нелинейного расчета железобетонных элементов / Шмуклер В.С. // Бетон и железобетон в Украине. – 2012. – Вып. №4 – С. 17-20.
7. Шмуклер В.С. Каркасные системы облегченного типа / Шмуклер В.С., Климов Ю.А., Бурак Н.П. – Харьков: Золотые страницы, 2008. – 336 с.
8. Клованич С.Ф. Модель деформирования бетона при реальных воздействиях / Клованич С.Ф. // Бетон и железобетон в Украине. – 2011. – Вып. №5. – С.13-18.
9. Васильков Г.В. Эволюционная теория жизненного цикла механических систем: Теория сооружений / Васильков Г.В. – М.: ЛКИ, 2008. – 320 с.

Статья поступила в редакцию 25.02.2013г.